

ШИФР 11-01

Олимпиадная работа
муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике

ОГБОУ, СОШ №10 с УЧОП г. Старого Оскола
учащегося 11 класса

Старооскольского городского округа

Северюкова Владислава

Педагог-наставник:

Щербенко Г. В.

11-01

1.2 p, q, r - три последовательных попарно различных простых числа $p < q < r$.

$$S = \frac{p+q+r}{3}, \quad S - \text{простое}$$

p, q, r - простые числа > 2 , значит нечетные, и S - тоже нечетное.

Обозначим разности:

$$a = q - p \geq 2, \quad b = r - q \geq 2$$

Получаем:

$$p = q - a, \quad r = q + b$$

$$\frac{p+q+r}{3} = \frac{(q-a)+q+(q+b)}{3} = \frac{q-a+q+q+b}{3} = \frac{3q+(b-a)}{3} = q + \frac{b-a}{3}$$

Т.к. S - целое число, то $b-a$ делится на 3.

Рассмотрим остатки от деления p, q, r на 3. Т.к. $p, q, r > 3$, то остатки только 1 или 2.

Если a не кратно 3, то p и q имеют разные остатки по модулю 3, и $p+q$ дает ост. 0. Тогда $p+q+r$ имеет такой же ост. как r делить на 3. Но $p+q+r$ делится на 3, поэтому r делить на 3 ост. 0, что невозможно т.к. r - простое число больше 3. Тогда a - кратно 3.

Аналогично, если b не кратно 3, то q и r имеют разные остатки, и $q+r$ имеет остаток 0, откуда p делится на 3 без остатка, что невозможно. Значит, b кратно 3.

Получаем, что a и b кратны 3. Т.к. a и b - нечетные числа, они кратны 6.

$$\text{Пусть } a = 6 \cdot k, \quad b = 6 \cdot m, \quad k, m \in \mathbb{N}$$

$$\text{Тогда } S = q + \frac{6m-6k}{3} = q + 2(m-k).$$

Т.к. S - простое число, а p, q, r - последовательные простые, то между q и r нет других простых. Если $m \neq k$, то S лежит строго между q и r (т.к. $S = q + 2(m-k)$, а $r = q + 6m$ и $2(m-k) < 6m$, при $m \geq 1$), получаем противоречие последовательности простых чисел. Тогда $m = k$, $a = b$.

Таким образом, p, q, r образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = a = b$ ~~последовательность~~

1.3. Рассмотрим 19 Треугольников с общей вершиной O . Пусть вершины оснований - это $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{19}$ причем ломанная $A_1 A_2 \dots A_{19} A_1$ замкнута и каждое звено $A_i A_{i+1} = 2$ (по модулю 19).
 В Треуг. $OA_i A_{i+1}$ стороны: $OA_i = x_i, OA_{i+1} = y_i, A_i A_{i+1} = 2$. x_i, y_i - целые числа.
 Периметр Треуг. i равен $2 + x_i + y_i$. Тогда сумма всех периметров Треугольников: $S = \sum_{i=1}^{19} (2 + x_i + y_i) = 38 + \sum_{i=1}^{19} (x_i + y_i)$.

Заметим, что каждое расстояние OA_i в сумме встречается дважды (как x_i и как y_{i-1}), поэтому:

$$\sum_{i=1}^{19} (x_i + y_i) = 2 \sum_{i=1}^{19} OA_i.$$

$$\sum_{i=1}^{19} (2 + x_i + y_i) = (2 + x_1 + y_1) + (2 + x_2 + y_2) + \dots + (2 + x_{19} + y_{19}).$$

Обозначим $d_i = OA_i$. Тогда $S = 38 + 2 \sum_{i=1}^{19} d_i$.

Из неравенства 4 в $\triangle OA_i A_{i+1}$ следует, что $|d_i - d_{i+1}| \leq 2$. Т.к. d_i - целые числа, то $|d_i - d_{i+1}| \leq 1$.

По условию у одного из \triangle естьбок сторона = 25, значит где нибудь $d_i = 25$.

Рассмотрим функцию последовательность $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{19}$. Она удовлетворяет условию: $|d_i - d_{i+1}| \leq 1$ для всех i (здесь считая $d_{20} = d_1$). Пусть m - это минимальное число d_i , а M - максимальное число d_i . Тогда $M \geq 25$.

Рассмотрим путь от вершины со значением M до вершины с m . В нем есть 2 пути. На каждом разрыв между соседними значениями не более 1, поэтому длина каждого пути не менее $M - m$. Т.к. общая длина 19, то $2 \cdot (M - m) \leq 19$, откуда $M - m \leq 9$. Т.к. $M \geq 25$, то $m \geq 16$.

Теперь оценим сумму $\sum_{i=1}^{19} d_i$.

Минимальная сумма достигается, когда $m = 16$ и последовательность имеет вид: она возрастает до 25 и убывает обратно до 16. Пример:

16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16.

Сумма: $(16 + 17 + \dots + 25) + (24 + 23 + \dots + 16) = \frac{(16+25) \cdot 10}{2} + \frac{(16+24) \cdot 9}{2} = 205 + 180 = 385$

1.1 Обозначим:

- R_g - рыцари с открыткой - они скажут "да"
 R_n - рыцари без открытки - они скажут "нет"
 L_g - лжецы с открыткой - они скажут "нет"
 L_n - лжецы без открытки - они скажут "да"

Получаем:

$$R_g + R_n = 7 \quad \text{— рыцари}$$

$$L_g + L_n = 7 \quad \text{— лжецы}$$

$$R_g + L_g = 7 \quad \text{— открытки} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} + \Rightarrow R_g + L_g + R_g + L_n = 14$$

$$R_g + L_n = 7 \quad \text{— "да"} \quad \leftarrow \Rightarrow 2R_g + (L_g + L_n) = 14$$

$$R_n + L_g = 7 \quad \text{— "нет"} \quad \leftarrow \Rightarrow 2R_g + 7 = 14$$

$$2R_g = 7$$

$$R_g = 3,5$$

R_g - целое число рыцарей с открытками.

Противоречие.

Ответ: нет, не могло

№	Фамилия	ФИО, подпись
1	G	Мамасва О. Ю. (подпись)
2	G	Варушкин Е. В. (подпись)
3	F	Александров Н. В. (подпись)
4	X	Ковалева А. С. (подпись)
5	X	Ковалева А. С. (подпись)
итого	19	